Lógica

Logica de Primer Orden: semántica

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Semántica de un lenguaje de primer orden

Interpretaciones

Una *interpretación* $\mathcal{I}$ es un par (D, I) tal que D es un conjunto no vacío (el *dominio* del universo) e I asigna *elementos del dominio* y *funciones* a los símbolos

- constantes: $I(a) = d \in D$
- variables: $I(x) = d \in D$
- funciones: $I(f/n) = \mathcal{F} : D^n \mapsto D$
  - $I(f(t_1, ..., t_n)) = \mathcal{F}(I(t_1), ..., I(t_n)) = \mathcal{F}(d_1, ..., d_n) \in D$
- predicados: $I(p/n) = \mathcal{P} : D^n \mapsto \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$
  - $I(p(t_1, ..., t_n)) = \mathcal{P}(I(t_1), ..., I(t_n)) = \mathcal{P}(d_1, ..., d_n) \in \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$

☞ una interpretación asigna un elemento de D a cada término, y un valor de verdad a cada predicado aplicado a términos

- $\mathcal{P}$ es una *relación* $\mathcal{R}$ con aridad n: $\mathcal{P}(d_1, ..., d_n) = \mathbf{v}$ sii $\langle d_1, ..., d_n \rangle \in \mathcal{R}$

Semántica de un lenguaje de primer orden

Evaluación de una fórmula

Asignación de un valor de verdad a la fórmula, según:

- la interpretación dada de constantes, funciones y predicados
- las reglas para la evaluación (vease también las *tablas de verdad*)

$$
\begin{array}{lll}
I(\neg F) = \mathbf{v} & \text{sii} & I(F) = \mathbf{f} \\
I(F \wedge G) = \mathbf{v} & \text{sii} & I(F) = I(G) = \mathbf{v} \\
I(F \vee G) = \mathbf{f} & \text{sii} & I(F) = I(G) = \mathbf{f} \\
I(F \rightarrow G) = \mathbf{f} & \text{sii} & I(F) = \mathbf{v} \text{ and } I(G) = \mathbf{f} \\
I(F \leftrightarrow G) = \mathbf{v} & \text{sii} & I(F) = I(G) \\
I(\forall x F(x)) = \mathbf{v} & \text{sii} & I((\forall x F)\{x/c\}_\forall) = \mathbf{v}\ ^* \text{ para toda constante } c \\
I(\exists x F(x)) = \mathbf{v} & \text{sii} & I((\exists x F)\{x/c\}_\exists) = \mathbf{v}\ ^* \text{ para al menos una constante } c
\end{array}
$$

  * necesitamos al menos un símbolo de constante para cada elemento de D

- una interpretación se puede denotar con I (en lugar de $\mathcal{I}$) si está claro de qué dominio estamos hablando

Semántica de un lenguaje de primer orden

Ejemplo: $\forall x(m(a,x) \land p(x)) \rightarrow \forall y q(s(y))$

- primera interpretación: $D = \{0, 1, 2, 3, ..\}$
  - $I(a) = 0$
  - $I(s(x)) = \mathcal{S}(I(x)) =$ el sucesor de $I(x)$
  - $p(x)$ significa que x es par
  - $q(x)$ significa que x es impar
  - $m(x, y)$ significa que $x < y$
- $\mathcal{I}$ evalúa la fórmula a ...

Semántica de un lenguaje de primer orden

Ejemplo: $\forall x(m(a,x) \wedge p(x)) \rightarrow \forall y q(s(y))$

- segunda interpretación: $D = \{$  ,  ,  $\}$, $I(a) =$ 

x	$s(x)$
	
	
	

x	$p(x)$
	**v**
	**v**
	**v**

x	$q(x)$
	**v**
	**f**
	**v**

m y / x			
	**v**	**v**	**v**
	**f**	**f**	**v**
	**v**	**f**	**f**

- y esto nos da ...

Semántica de un lenguaje de primer orden

Fórmulas satisfacibles

Una interpretación $\mathcal{I} = (D, I)$ *satisface* una fórmula F sobre D sii $I(F) = \mathbf{v}$ (también escrito como $\mathcal{I}(F) = \mathbf{v}$). En este caso, $\mathcal{I}$ es un *modelo* de F

- F es *satisfacible* (escrito $SAT(F)$) sii tiene al menos un modelo
- F es *insatisfacible* (escrito $INSAT(F)$) sii no tiene modelos
  - es decir, todas las interpretaciones son *contramodelos*
- F es *válida* (escrito $VAL(F)$) sii todas las interpretaciones son modelos
  - esto se escribe $\models F$, y es equivalente a decir $INSAT(\neg F)$

Con un conjunto de fórmulas $\{F_1, .., F_n\}$:

- (D, I) satisface $\{F_1, .., F_n\}$ sii $I(F_i) = \mathbf{v}$ sobre D para todo i
- $\{F_1, .., F_n\}$ es satisfacible sii existe tal interpretación

Ejemplo: $\forall x(m(a, x) \wedge p(x)) \rightarrow \forall y q(s(y))$

- esta fórmula es satisfacible pero no válida

Consecuencia lógica

Consecuencia lógica

Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{F_1, .., F_n\}$ y una fórmula G sobre el mismo lenguaje, G es *consecuencia lógica* de Γ (escrito $\Gamma \models G$) sii toda interpretación que satisface a Γ también satisface a G, o, alternativamente, no hay ninguna interpretación que satisfaga a Γ y que no satisfaga a G

Importante (teorema de deducción)

$$\{F_1, .., F_n\} \models G \qquad \text{sii} \qquad \models (F_1 \wedge .. \wedge F_n) \rightarrow G$$

Consecuencia lógica

Ejemplo: $\{\exists x p(x),\ \exists x q(x)\} \models \exists x(p(x) \wedge q(x))$

- $D = \{1, 2, 3, 4, ..\}$
- $p(x)$: x es par
- $q(x)$: x es impar

Se puede ver fácilmente que esta interpretación satisface las dos premisas (hay números pares y hay números impares) pero no la conclusión (ningún número es a la vez par e impar)

$$I(\exists x p(x)) = \mathbf{v} \quad I(\exists x q(x)) = \mathbf{v} \quad I(\exists x(p(x) \wedge q(x))) = \mathbf{f}$$

Entonces, esta deducción es incorrecta

Ejemplo: $\{\exists x p(x),\ \exists x q(x)\} \models \exists x(p(x) \vee q(x))$

- esta deducción es correcta (o *válida*, véase unas trasparencias más arriba)

Semántica y cierres

Cierre universal

- F es *consecuencia lógica* de $Cierre_\forall(F)$
  - es decir, el cierre tiene "menos" modelos
  - es decir, $Cierre_\forall(F) \rightarrow F$ es válida
- $Cierre_\forall(F)$ es *válida* sii F lo es

Cierre existencial

- $Cierre_\exists(F)$ es *consecuencia lógica* de F
  - es decir, el cierre tiene "más" modelos
  - es decir, $F \rightarrow Cierre_\exists(F)$ es válida
- $Cierre_\exists(F)$ es *satisfacible* sii F lo es
  - es decir, $Cierre_\exists(F)$ es *insatisfacible* sii F lo es

Semántica y sustituciones

Aplicación universal

- dadas F y α, la aplicación universal de α a F es consecuencia lógica de F
  - es decir, todos los modelos de F son modelos de $F\alpha_{\forall}$

Aplicación existencial

- dadas F y α, F es consecuencia lógica de la aplicación existencial de α a F
  - es decir, todos los modelos de $F\alpha_{\exists}$ son modelos de F

$$\begin{array}{rr}
\exists x \exists y\, padre(x, y) & \qquad \forall x \forall y \exists z\, suma(x, y, z) \\
\exists y\, padre(a, y) & \forall x \exists z\, suma(x, b, z) \\
padre(a, b) & \exists z\, suma(a, b, z)
\end{array}$$